8 Različne naloge

Spomnimo se: Grupoid S je množica z binarno operacijo $\circ : S \times S \to S$. Polgrupa je grupoid z asociativno operacijo. Monoid je polgrupa z enoto.

1. Razišči strukturo naslednjih grupoidov:

(a) $S = \mathbb{R}$ za operacijo $x \circ y = x + y + xy$;

(b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ za operacijo množenja matrik;

(c) $S = \mathbb{R}^3$ za operacijo vektorski produkt;

(d) $S = \mathbb{R}$ za operaciji $a *_L b = a$ in $a *_R b = b$;

(e) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ za operacijo, ki je podana s tabelo desno.

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	1	5	3
3	3	5	4	2	1
4	4	1	5	3	2
5	5	3	2	1	4

2. Dokaži, da sta naslednji množici z danima operacijama grupi:

(a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \right\}$ za operacijo množenje matrik;

(b) $S = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0) \right\}$ za množenje števil.

3. Izračunaj rede vseh elementov v grupah $\mathbb{Z}_{20}$, S_3 in S_5.

4. Dana je permutacija $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$. Izračunaj a^{-1}, a^2 in a^{1000}.

Definicija ($\mathrm{Hom}(G, H)$)
Naj bosta G in H dve dani grupi. Definirajmo množico $\mathrm{Hom}(G, H)$ kot množico vseh homomorfizmov iz grupe G v grupo H.

Lahko se dokaže, da če sta G in H abelski grupi, potem je množica $\mathrm{Hom}(G, H)$ tudi abelska grupa glede na operacijo seštevanja, ki je definirana z $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $\forall x \in G$, $\forall f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$.

5. Poišči vse homomorfizme grup:

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$;

(c) $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$;

(d) $\mathbb{Z}_n \to U$, kje je $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Zanimivo: Homomorfizmom iz grupe G v grupo U rečemo karakterji. Karakterji igrajo osrednjo vlogo v teorijah Fourierovih vrst, Fourierove transformacije in diskretne Fourierove transformacije. Pri posplošitvi Fourierove teorije na nekomutativne grupe karakterje nadomestimo s homomorfizmi dane grupe v matrične grupe, ki jih imenujemo tudi reprezentacije oziroma upodobitve.

6. Poišči vse automorfizme grup $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$ in $\mathbb{Z}_{10}$.

Opomba. V splošnem so automorfizmi grupe Z_n v bijektivni korespondenci z elementi $U(n)$. Elementu $m \in U(n)$ pripada preslikava množenja z m po modulu n.

7. Zapiši grupno tabelo za operacijo v grupi $U(10)$. Kateri grupi je izomorfna grupa $U(10)$.

Spomnimo se: Če sta A in B množici, potem je $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

8. Določi dve pravi podgrupi K grupe D_4 (tj. podgrupe ki niso $\{e\}$ in D_4) za kateri velja, da je $aK = Ka$ za vsak $a \in D_4$.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

9. Dana je grupa G z grupno tabelo levo. Kateri znani grupi je izomorfna grupa G?

10. Opiši grupo izometrij kvadrata.

11. Pokaži, da je za poljubni $\ell \in U(n)$, funkcija $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ definirana z $\phi(x) = x\ell \bmod n$ automorfizem grupe $\mathbb{Z}_n$.

12. Poišči vse podgrupe grup $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{10}$ in Q, kje je Q kvaternionska grupa (Cayleyjeva tabela kvaternionske grupe Q je dana v tabeli desno; vsi simboli i, j in k so koreni števila -1, in množenje $*$ med njimi je definirano po pravilih: $i * j = k = -j * i$, $j * k = i = -k * j$ in $k * i = j = -i * k$).

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	1	-1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	-1	1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	1	-1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	-1	1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	1	-1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	-1	1

13. Dokaži, da je vsaka grupa praštevilskega reda ciklična.

14. Pokaži, da je $U(8) \cong U(12)$.

15. Poišči vse homomorfizme
(a) iz grupe $\mathbb{Z}_4$ v grupo $\mathbb{Z}_3$;
(b) iz grupe $\mathbb{Z}_8$ v grupo S_3.

16. Grupa G je podana s tabelo

$\circ$	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	e	c	g	b	f	1	d
b	b	c	f	1	e	g	d	a
c	c	g	1	a	f	d	b	e
d	d	b	e	f	a	c	g	1
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	1	d	b	g	a	e	c
g	g	d	a	e	1	b	c	f

(a) Poišči rede vseh elementov grupe G.
(b) Ugotovi, kateri znani grupi je izomorfna grupa G in poišči eksplicitni izomorfizem.

17. Preveri ali je dana preslikava homomorfizem grup:
(a) $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $\phi(x)$ je največje celo število, manjše od x;
(b) $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\phi(x) = |x|$;
(c) $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\phi(x) = 2^x$;
(d) $\phi : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_2$, $\phi(x) = x \pmod 2$;
(e) $\phi : G \to G$, G poljubna grupa in $\phi(g) = g^{-1}$;
(f) $\phi : (\mathbb{R}^{n\times n}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $\phi(A) = \det(A)$.

18. Poišči vse podgrupe grup S_3.

19. Naj bo S_4 simetrična grupa reda $4!$.
(a) Določite podgrupo grupe S_4, ki vsebuje 6 elementov.
(b) Koliko podgrup reda 6 obstaja v grupi S_4?
(c) Če je $H = \langle (12), (13) \rangle$, določite vse leve odseke podgrupe H v grupi S_4.

Nathan Jacobson

> Few mathematicians have been as productive over such a long career or have had as much influence on the profession as has Professor Jacobson.
>
> *Citation for the Steele Prize, for Lifetime Achievement*

Nathan Jacobson was born on September 8, 1910, in Warsaw, Poland. After arriving in the United States in 1917, Jacobson grew up in Alabama, Mississippi, and Georgia, where his father owned small clothing stores. He received a B.A. degree from the University of Alabama in 1930 and a Ph.D. from Princeton in 1934. After brief periods as a professor at Bryn Mawr, the University of Chicago, the University of North Carolina, and Johns Hopkins, Jacobson accepted a position at Yale, where he remained until his retirement in 1981.

Jacobson's principal contributions to algebra were in the areas of rings, Lie algebras, and Jordan algebras. In particular, he developed structure theories for these systems. He was the author of nine books and numerous articles, and he had 33 Ph.D. students.

Jacobson held visiting positions in France, India, Italy, Israel, China, Australia, and Switzerland. Among his many honors were the presidency of the American Mathematical Society, memberships in the National Academy of Sciences and the American Academy of Arts and Sciences, a Guggenheim Fellowship, and an honorary degree from the University of Chicago. Jacobson died on December 5, 1999, at the age of 89.

Rešitve: **1.**[(a) operacija je asociativna; število 0 je enota za operacijo $\circ$; operacija je komutativna; inverz $x^{-1} = -x/(1+x)$, so obrnljivi vsi elementi razen $x = -1$; $(S, \circ)$ komutativen monoid; imamo izomorfizem $f : (S, \circ) \to (R, \cdot)$, $f(x) = x + 1$][(b) množica S je zaprta za množenje; asociativnost operacije sledi iz asociativnosti matričnega množenja; enota $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; inverz $\begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $(S, \cdot)$ je grupa; izomorfna je grupi realnih števil za seštevanje: $f : (S, \cdot) \to (R, +)$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = x$][(c) vektorski produkt dveh vektorjev iz $\mathbb{R}^3$ je spet vektor iz $\mathbb{R}^3$, zato je operacija dobro definirana; vektorski produkt ni asociativna operacija ($\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$, npr. $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = -\vec{j}$, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j}) = \vec{0}$); operacija nima enote; je torej $(\mathbb{R}^3, \times)$ le grupoid]. [(a) komutativen monoid, imamo izomorfizem $f : (S, \circ) \to (\mathbb{R}, \cdot)$, $f(x) = x + 1$; (b) je grupa; izomorfna je grupi realnih števil za seštevanje; (c) le grupoid; (d) množica $\mathbb{R}$ je za obe operaciji polgrupa; (e) operacija ni asociativna, ima enoto 1, vsak element ima tako levi kot desni inverz, ki pa nista vedno enaka] **2.**(a) [$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x & -y/x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$]; (b) [$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$]. **3.** [elementi ciklične grupe $\mathbb{Z}_{20}$, ki so tuji proti 20, imajo maksimalen možni red 20. Če nek tak element množimo z 2, dobimo element reda 10. Če ga množimo s 4, dobimo element reda 5] **4.** [$a = (1378)(456)$, $a^{-1} = (1873)(465)$, $a^2 = (17)(38)(465)$, $a^{1000} = (456)$] **5.**(a) [$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$] (b) [$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$] (c) [$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$] (d) [$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, U) \cong \mathbb{Z}_n$]. **6.** [$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\}$; grupa $\mathbb{Z}_5$ je ciklična, zato je vsak homomorfizem $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ določen s sliko generatorja, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong U(5)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{10}) \cong U(10)$] **7.** [$U(10) \cong \mathbb{Z}_4$] **8.** [1 − 1, na, homomorfizem] **9.** [$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$] **10.** [$D_4 = \{a, b \,|\, a^4 = 1, b^2 = 1, bab = a^3\}$] **11.** [$K_1 = \{R_0, R_{180}\}$,...] **12.** [$\{0\}$, $\mathbb{Z}$; $\{0\}$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\langle 5\rangle$, $\langle 2\rangle$; $\{0\}$, Q, $\{-1, 1\}$, $\{1, i, -1, -i\}$, $\{1, j, -1, -j\}$, $\{1, k, -1, -k\}$] **13.** [$|G| = p$, $a \in G$, $|a|$ deli $|G|$] **14.** [napiši, Cayley-evo tabelo] **15.**(a) [$\phi(k) = 0$]; (b) [red elementa $\phi(1)$ mora deliti 8, dobimo štiri možnosti]. **16.** **17.** **18.** [6] **19.** (a) [$S_3 \leq S_4$, $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$]. (b) [Obstajajo 4 grupe reda 6]. (c) [$H = S_3$. Levi odseki so: $(1)H$, $(14)H$, $(24)H$, $(34)H$].

Appendix.[21][22][23]

matrices	
literal	n:=2;
	A:=ZeroMatrix(Integers(),n,n);
	A[1,1]:=6; A[1,2]:=7;
	A[2,1]:=8; A[2,2]:=9;
	or
	M:=MatrixRing(Rationals(), 2);
	B:=Matrix(M![10,11,12,13]);
defining a 2×3 matrix over GF(23):	X:=Matrix(GF(23),2,3, [1,-2,3,4,100,-6]);
diagonal matrices	D := DiagonalMatrix(GF(23), [1, 2, -3]);
symmetric matrix over $\mathbb{Q}$	S := SymmetricMatrix([1, 1/2,3, 1,3,4]);
dimensions	NumberOfRows(A);
	Nrows(A);
	NumberOfColumns(A);
	Ncols(A);
	NumberOfNonZeroEntries(A);
element lookup	A[1,1];
extract submatrix	A:=Matrix(6,
	[9,1,7,-3,2,-1,
	3,-4,-5,9,2,7,
	7,1,0,1,8,22,
	-3,3,3,8,8,37,
	-9,0,7,-1,2,3,
	7,2,-2,4,3,47]);
	Submatrix(A,2,2, 3,3);
	SubmatrixRange(A,2,2, 3,3);
	RowSubmatrix(A,5,2);
	RowSubmatrixRange(A,2, 3);
	RowSubmatrix(A,2, 0);
extract row	RowSubmatrix(A,5,1);
extract column	ColumnSubmatrix(A,5,1);
insert block	S := Submatrix(A, 1,1, 3,3);
	InsertBlock(~A, S, 4,4);
element-wise operators	+ -
product	A*B;
power	A^3;
transpose	Transpose(A);
inverse	A^(-1);
determinant	Determinant(A);
trace	Trace(A);
rank	Rank(A);
nullspaces	Nullspace(A);
	NullspaceMatrix(A);
	NullspaceOfTranspose(A);
solutions to the system V.X=W	K := GF(3);
	X := Matrix(K, 4, 3, [1,2,1, 2,2,2, 1,1,1, 1,0,1]);
	W := Vector(K, [0,1,0]);
	V, N := Solution(X, W);
eigenvalues	Eigenvalues(A);

[21] To write MAGMA code please open: http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/

[22] See also: http://www.maths.usyd.edu.au/u/bobh/UoS/MATH2008/ctut08.pdf

[23] or http://hyperpolyglot.org/more-computer-algebra